《信号与系统》课程测验一

2019 年 4 月 14 日

已知描述 LTI 系统的微分方程为

$$y(t)'' + 5y(t)' + 6y(t) = f(t)$$

系统初始状态为 $y(0^-) = 0, y'(0^-) = 0$，系统输入信号为 $f(t) = e^{-3t}u(t)$，

1、求系统的完全响应；

2、判断系统的稳定性；

解：

1、求解系统完全响应

方法一：传统求解微分方程获得系统完全响应

首先，求解微分方程的齐次解；根据系统微分方程，获得其齐次方程对应的特征方程为：

$r^2 + 5r + 6 = 0$

对应的特征根为：$r_1 = -2$,$r_2 = -3$；为两不等实根。因此原微分方程齐次解为

$y_n = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$;

其次，求微分方程特解，根据 $f(t)$ 的形式，设特解为

$y_s = ke^{-3t}t$

带入微分方程，求得 $k = -1$；因此，方程特解为 $y_s = -e^{-3t}t$。

再次，微分方程的解为

$y = y_n + y_s = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} - e^{-3t}t$，根据微分方程初值条件 $y(0^-) = 0, y'(0^-) = 0$，有

$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -2c_1 - 3c_2 = 1 \end{cases}$，解得 $c_1 = 1$，$c_2 = -1$。

因此系统响应为：$y=e^{-2t}-e^{-3t}-e^{-3t}t$。

方法二：根据零输入响应与零状态响应求解

首先，求解系统零输入响应，即 $f(t)=0$，此时，系统初始状态均为 0，

固有零输入响应 $y_{zi}=0$;

其次，求系统零状态响应；先求系统的单位冲激响应 $h(t)$。根据微分方程的形式，有

$h''(t)+5h'(t)+6h(t)=\delta(t)$，

对应的特征方程为

$r^2+5r+6=0$

对应的特征根为：$r_1=-2$,$r_2=-3$；为两不等实根。故设冲激响应 $h(t)=\left(Ae^{-2t}+Be^{-3t}\right)u(t)$,

对其求导，有

$h(t)'=\left(Ae^{-2t}+Be^{-3t}\right)\delta(t)+\left(-2Ae^{-2t}-3Be^{-3t}\right)u(t)=(A+B)\,\delta(t)+\left(-2Ae^{-2t}-3Be^{-3t}\right)u(t)$

$h(t)''=(A+B)\,\delta'(t)+\left(-2Ae^{-2t}-3Be^{-3t}\right)\delta(t)+\left(4Ae^{-2t}+9Be^{-3t}\right)u(t)$

将其带入冲激响应微分方程，可得

$\begin{cases}A+B=0\\3A+2B=1\end{cases}$ 解得 $A=1$，$B=-1$。

因此有冲激响应 $h(t)=\left(e^{-2t}-e^{-3t}\right)u(t)$

系统的零状态响应，是输入信号与冲激响应的卷积，故

$y_{zs}=f(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)h(t-\tau)d\tau$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-3\tau}\left(e^{-2(t-\tau)}-e^{-3(t-\tau)}\right)u(t-\tau)d\tau$

$=\int_0^t e^{-3\tau}(e^{-2(t-\tau)}-e^{-3(t-\tau)})d\tau$

$=e^{-2t}-e^{-3t}-e^{-3t}t$

系统完全响应等于零状态响应与零输入响应之和，故系统响应为：$y=e^{-2t}-e^{-3t}-e^{-3t}t$。

2、判断系统的稳定性

根据系统冲激响应，有

$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(\tau)|\,d\tau=\int_0^{+\infty}\left|e^{-2\tau}-e^{-3\tau}\right|d\tau=\int_0^{+\infty}(e^{-2\tau}-e^{-3\tau})d\tau=\frac{1}{6}<\infty$

根据 LTI 系统稳定的充要判别条件，系统稳定。