拉普拉斯变换 Laplace Transform

参考：Chapter4

The Laplace transform is used extensively to facilitate and systematize the solution of ordinary constant-coefficient differential equations.

1．拉普拉斯变换的定义

单值函数$f(t)$在（0，∞）区间有定义时，$f(t)$的拉普拉斯积分

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \qquad (s>0)$$

称为$f(t)$的拉普拉斯变换，记为

$$L[f(t)]=F(s)$$

如果$f(t)$在有限区间内的不连续点的数目是有限的，并在 t 大于某个时间 T 时，存在满足$\left|f(t)\right|e^{-at}<M$的正实数 a 和 M，那么$\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ 对 Re(s)>a 的所有复数 s 是绝对收敛的。即，$f(t)$是可拉普拉斯变换的(Laplace-transformable)。

2．拉普拉斯变换的定理和运算

如果$f(t)$,$f_1(t)$和$f_2(t)$是可拉普拉斯变换的，它们的拉普拉斯变换分别是 F(s), $F_1(s)$和 $F_2(s)$，那么可以证明如下定理。

（1）线性和叠加定理

$$L[af(t)]=aF(s)$$ Linearity

$$L[af_1(t)+bf_2(t)]=aF_1(s)+bF_2(s)$$ Superposition

（2）t 域内的位移定理 Translation in time

$$L[f(t-\tau)\cdot 1(t-\tau)]=e^{-\tau s}F(s)$$

(dead time/transport lag, P239 Fig.7.27)

（3）t 域内的卷积定理 Convolution integral

$$L[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau]=F_1(s)F_2(s)$$

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau=\int_0^t f_2(t-\tau)f_1(\tau)d\tau$$

（4）函数乘以或除以 t

$$L[tf(t)]=-\frac{dF(s)}{ds}$$ Complex differentiation

$$L[\frac{f(t)}{t}]=\int_s^\infty F(s)ds$$ Complex integration

（5）s 域内的位移定理 Translation in s-domain

$$L[e^{-at}f(t)]=F(s+a)$$

（6）相似定理 Scaling in time

$$L\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right]=aF(as)$$

（7）t 域内的微分定理 Real differentiation

设 $\frac{d^n f(t)}{dt^n}$ 是可以进行拉普拉斯变换的，则

$$L_{\pm}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=sF(s)-f(0_{\pm})$$

$$L_{\pm}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right]=s^2F(s)-sf(0_{\pm})-f'(0_{\pm})$$

…….

$$L_{\pm}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0_{\pm})-s^{n-2}f'(0_{\pm})-\cdots-sf^{(n-2)}(0_{\pm})-f^{(n-1)}(0_{\pm})$$

这里及以后公式中的下标符号±是指当 $f(0_+)\neq f(0_-)$ 时，拉普拉斯积分的下限是 0_+ 或是 0_-。如有 $f(0_+)=f(0_-)$，则可忽略此±符号。$f^{(i)}$ 代表 $d^i f/dt$。

如果原函数 $f(t)$ 及其各阶导数的初始条件均为零，则有

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right]=s^nF(s)$$

（8）t 域内的积分定理 Real integration

$$L_{\pm}\left[\int f(t)dt\right]=\frac{F(s)}{s}+\frac{1}{s}\left[\int f(t)dt\right]_{t=0\pm}$$

$$L_{\pm}\left[\int\int f(t)dtdt\right]=\frac{F(s)}{s^2}+\frac{1}{s^2}\left[\int f(t)dt\right]_{t=0\pm}+\frac{1}{s}\left[\int\int f(t)dtdt\right]_{t=0\pm}$$

…….

$$L_{\pm}\left[\int\cdots\int f(t)(dt)^n\right]=\frac{F(s)}{s^n}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{s^{n-k+1}}\left[\int\cdots\int f(t)(dt)^k\right]_{t=0\pm}$$

（

9）终值定理 Final value

设df/dt是可以拉普拉斯变换的，$\lim_{t\to\infty} f(t)$存在，并且除在原点处惟一的极点外，sF(s)在包含 jω 轴的右半平面是解析的。则有

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

（10）初值定理 Initial value

设df/dt是可以拉普拉斯变换的，$\lim_{s\to\infty} sF(s)$存在，则有

$$f(0_+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

3．拉普拉斯的反变换 Inverse Transform

数学上，拉普拉斯反变换通过下述公式计算

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}dt \qquad (t > 0)$$

其中 c 大于 F(s)所有奇点的实部。

拉普拉斯反变换记为

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$$

计算上述复变函数积分往往有困难，所以一般求拉普拉斯反变换都是先对 F(s)进行部分分式分解(sum of partial fractions)，再查表求得 $f(t)$。

In Matlab

```
>> syms t s
>> laplace(t*exp(-4*t),t,s)
ans =
1/(s + 4)^2
>> ilaplace(s*(s+6)/((s+3)*(s^2+6*s+18)))
ans =
(2*cos(3*t))/exp(3*t) - 1/exp(3*t)
```

4．拉普拉斯变换表

$F(s)$	$f(t) \quad 0 \le t$
1. 1	$u_0(t)$ unit impulse at $t = 0$
2. $\frac{1}{s}$	1 or $u_{-1}(t)$ unit step starting at $t = 0$
3. $\frac{1}{s^2}$	$tu_{-1}(t)$ ramp function
4. $\frac{1}{s^n}$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}$ $n =$ positive integer
5. $\frac{1}{s}e^{-as}$	$u_{-1}(t-a)$ unit step starting at $t = a$
6. $\frac{1}{s}(1-e^{-as})$	$u_{-1}(t) - u_{-1}(t-a)$ rectangular pulse
7. $\frac{1}{s+a}$	e^{-at} exponential decay
8. $\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}$ $n =$ positive integer

（待续）

$F(s)$		$f(t) \quad 0 \le t$
9.	$\dfrac{1}{s(s+a)}$	$\dfrac{1}{a}(1-e^{-at})$
10.	$\dfrac{1}{s(s+a)(s+b)}$	$\dfrac{1}{ab}\left(1-\dfrac{b}{b-a}e^{-at}+\dfrac{a}{b-a}e^{-bt}\right)$
11.	$\dfrac{s+\alpha}{s(s+a)(s+b)}$	$\dfrac{1}{ab}\left[\alpha-\dfrac{b(\alpha-a)}{b-a}e^{-at}+\dfrac{a(\alpha-b)}{b-a}e^{-bt}\right]$
12.	$\dfrac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\dfrac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt})$
13.	$\dfrac{s}{(s+a)(s+b)}$	$\dfrac{1}{a-b}(ae^{-at}-be^{-bt})$
14.	$\dfrac{s+\alpha}{(s+a)(s+b)}$	$\dfrac{1}{b-a}[(\alpha-a)e^{-at}-(\alpha-b)e^{-bt}]$
15.	$\dfrac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\dfrac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\dfrac{e^{-bt}}{(c-b)(a-b)}+\dfrac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$
16.	$\dfrac{s+\alpha}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\dfrac{(\alpha-a)e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\dfrac{(\alpha-b)e^{-bt}}{(c-b)(a-b)}+\dfrac{(\alpha-c)e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$
17.	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin \omega t$
18.	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos \omega t$
19.	$\dfrac{s+\alpha}{s^2+\omega^2}$	$\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}{\omega}\sin(\omega t+\phi) \qquad \phi=\tan^{-1}\dfrac{\omega}{\alpha}$
20.	$\dfrac{s\sin\theta+\omega\cos\theta}{s^2+\omega^2}$	$\sin(\omega t+\theta)$
21.	$\dfrac{1}{s(s^2+\omega^2)}$	$\dfrac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$
22.	$\dfrac{s+\alpha}{s(s^2+\omega^2)}$	$\dfrac{\alpha}{\omega^2}-\dfrac{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}{\omega^2}\cos(\omega t+\phi) \qquad \phi=\tan^{-1}\dfrac{\omega}{\alpha}$
23.	$\dfrac{1}{(s+a)(s^2+\omega^2)}$	$\dfrac{e^{-at}}{a^2+\omega^2}+\dfrac{1}{\omega\sqrt{a^2+\omega^2}}\sin(\omega t-\phi) \quad \phi=\tan^{-1}\dfrac{\omega}{a}$
24.	$\dfrac{1}{(s+a)^2+b^2}$	$\dfrac{1}{b}e^{-at}\sin bt$
24*a*.	$\dfrac{1}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$	$\dfrac{1}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\;t$

（待续）

$F(s)$	$f(t) \quad 0 \le t$
25. $\dfrac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\cos bt$
26. $\dfrac{s+\alpha}{(s+a)^2+b^2}$	$\dfrac{\sqrt{(\alpha-a)^2+b^2}}{b}e^{-at}\sin(bt+\phi) \quad \phi=\tan^{-1}\dfrac{b}{\alpha-a}$
27. $\dfrac{1}{s[(s+a)^2+b^2]}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}+\dfrac{1}{b\sqrt{a^2+b^2}}e^{-at}\sin(bt-\phi)$ $\phi=\tan^{-1}\dfrac{b}{-a}$
27a. $\dfrac{1}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$	$\dfrac{1}{\omega_n^2}-\dfrac{1}{\omega_n^2\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\phi)$ $\phi=\cos^{-1}\zeta$
28. $\dfrac{s+\alpha}{s[(s+a)^2+b^2]}$	$\dfrac{\alpha}{a^2+b^2}+\dfrac{1}{b}\sqrt{\dfrac{(\alpha-a)^2+b^2}{a^2+b^2}}e^{-at}\sin(bt+\phi)$ $\phi=\tan^{-1}\dfrac{b}{\alpha-a}-\tan^{-1}\dfrac{b}{-a}$
29. $\dfrac{1}{(s+c)[(s+a)^2+b^2]}$	$\dfrac{e^{-ct}}{(c-a)^2+b^2}+\dfrac{e^{-at}\sin(bt-\phi)}{b\sqrt{(c-a)^2+b^2}}$ $\phi=\tan^{-1}\dfrac{b}{c-a}$
30. $\dfrac{1}{s(s+c)[(s+a)^2+b^2]}$	$\dfrac{1}{c(a^2+b^2)}-\dfrac{e^{-ct}}{c[(c-a)^2+b^2]}$ $+\dfrac{e^{-at}\sin(bt-\phi)}{b\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{(c-a)^2+b^2}}$ $\phi=\tan^{-1}\dfrac{b}{-a}+\tan^{-1}\dfrac{b}{c-a}$
31. $\dfrac{s+\alpha}{s(s+c)[(s+a)^2+b^2]}$	$\dfrac{\alpha}{c(a^2+b^2)}+\dfrac{(c-\alpha)e^{-ct}}{c[(c-a)^2+b^2]}$ $+\dfrac{\sqrt{(\alpha-a)^2+b^2}}{b\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{(c-a)^2+b^2}}e^{-at}\sin(bt+\phi)$ $\phi=\tan^{-1}\dfrac{b}{\alpha-a}-\tan^{-1}\dfrac{b}{-a}-\tan^{-1}\dfrac{b}{c-a}$
32. $\dfrac{1}{s^2(s+a)}$	$\dfrac{1}{a^2}(at-1+e^{-at})$

（待续）

$F(s)$	$f(t) \quad 0 \le t$
33. $\dfrac{1}{s(s+a)^2}$	$\dfrac{1}{a^2}(1 - e^{-at} - ate^{-at})$
34. $\dfrac{s+\alpha}{s(s+a)^2}$	$\dfrac{1}{a^2}[\alpha - \alpha e^{-at} + a(a-\alpha)te^{-at}]$
35. $\dfrac{s^2+\alpha_1 s+\alpha_0}{s(s+a)(s+b)}$	$\dfrac{\alpha_0}{ab} + \dfrac{a^2-\alpha_1 a+\alpha_0}{a(a-b)}e^{-at} - \dfrac{b^2-\alpha_1 b+\alpha_0}{b(a-b)}e^{-bt}$
36. $\dfrac{s^2+\alpha_1 s+\alpha_0}{s[(s+a)^2+b^2]}$	$\dfrac{\alpha_0}{c^2} + \dfrac{1}{bc}[(a^2-b^2-\alpha_1 a+\alpha_0)^2$ $+ b^2(\alpha_1-2a)^2]^{1/2}e^{-at}\sin(bt+\phi)$ $\phi = \tan^{-1}\dfrac{b(\alpha_1-2a)}{a^2-b^2-\alpha_1 a+\alpha_0} - \tan^{-1}\dfrac{b}{-a}$ $c^2 = a^2+b^2$
37. $\dfrac{1}{(s^2+\omega_2)[(s+a)^2+b^2]}$	$\dfrac{(1/\omega)\sin(\omega t+\phi_1)+(1/b)e^{-at}\sin(bt+\phi_2)}{[4a^2\omega^2+(a^2+b^2-\omega^2)^2]^{1/2}}$ $\phi_1 = \tan^{-1}\dfrac{-2a\omega}{a^2+b^2-\omega^2} \quad \phi_2 = \tan^{-1}\dfrac{2ab}{a^2-b^2+\omega^2}$
38. $\dfrac{s+\alpha}{(s^2+\omega^2)[(s+a)^2+b^2]}$	$\dfrac{1}{\omega}\left(\dfrac{\alpha^2+\omega^2}{c}\right)^{1/2}\sin(\omega t+\phi_1)$ $+\dfrac{1}{b}\left[\dfrac{(\alpha-a)^2+b^2}{c}\right]^{1/2}e^{-at}\sin(bt+\phi_2)$ $c = (2a\omega)^2+(a^2+b^2-\omega^2)^2$ $\phi_1 = \tan^{-1}\dfrac{\omega}{a} - \tan^{-1}\dfrac{2a\omega}{a^2+b^2+\omega^2}$ $\phi_2 = \tan^{-1}\dfrac{b}{\alpha-a} + \tan^{-1}\dfrac{2ab}{a^2-b^2+\omega^2}$
39. $\dfrac{s+\alpha}{s^2[(s+a)^2+b^2]}$	$\dfrac{1}{c}\left(\alpha t+1-\dfrac{2\alpha a}{c}\right) + \dfrac{[b^2+(\alpha-a)^2]^{1/2}}{bc}e^{-at}\sin(bt+\phi)$ $c = a^2+b^2$ $\phi = 2\tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right) + \tan^{-1}\dfrac{b}{\alpha-a}$
40. $\dfrac{s^2+\alpha_1 s+\alpha_0}{s^2(s+a)(s+b)}$	$\dfrac{\alpha_1+\alpha_0 t}{ab} - \dfrac{\alpha_0(a+b)}{(ab)^2} - \dfrac{1}{a-b}\left(1-\dfrac{\alpha_1}{a}+\dfrac{\alpha_0}{a^2}\right)e^{-at}$ $-\dfrac{1}{1-b}\left(1-\dfrac{\alpha_1}{b}+\dfrac{\alpha_0}{b^2}\right)e^{-bt}$