第24卷第6期 2004年12月
咸宁学院学报 Journal of Xianning College
Vol.24,No.6 Dec. 2004

文章编号:1006-5342(2004)06-0090-03

根轨迹的分离点(或会合点)的几种求法*

汪 洋

(咸宁学院 物理系,湖北 咸宁 437005)

摘 要:介绍了自动控制理论中根轨迹的分离点和会合点的几种求法.较简单的系统常用的方法有重根法、极值法和根据开环零极点的方法;较复杂的系统常用的方法有试探法和牛顿余数定理法.

关键词:根轨迹;分离点;会合点

中图分类号:TP13 **文献标识码**:A

0 引言

1948年,伊文斯(*W. R. Evans*)提出了一种由反馈系统的开环传递函数求取闭环特征方程式根的图解法——根轨迹法[1].求取根轨迹的分离点或会合点是根轨迹分析的一个重要内容.二条以上根轨迹的分支的交点称为根轨迹的分离点或会合点.当根轨迹分支在实轴上相交后走向复平面时,该相交的点称为根轨迹的分离点;当根轨迹分支由复平面走向实轴时,它们在实轴上的交点称为会合点[2].这些点对应于特征方程的二重根.由于根轨迹具有共轭对称性,故分离点与会合点必然是实数或共轭复数对.在一般情况下,分离点与会合点多出现于实轴上.

一般地,若实轴上两相邻开环极点之间存在根轨迹,则这两相邻极点之间必有分离点;若实轴上相邻开环零点(其中一个可能是无穷远处零点)之间存在根轨迹,则这两相邻零点之间必有会合点;若实轴上根轨迹处在开环零点与极点之间,则它们中间可能会出现分离点或会合点,也有可能无分离点或会合点,要视具体情况而定.[3]

1 求取分离点的方法

1.1 重根法

由于根轨迹上的分离点或会合点对应于特征方程的二重根,因此可用求重根的方法确定它们的位置.

如果代数方程 $f(x)=0$ 具有重根 x_1,就必然满足 $f(x_1)=0$ 和 $f'(x_1)=0$.设系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=K_g\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

$$=K_g\frac{N(s)}{D(s)}^{[4]}\quad(n\geqslant m)\tag{1}$$

式中,z_i 为系统开环零点,p_j 为系统开环极点,$N(s)$、$D(s)$ 分别为m阶、n阶多项式.则闭环特征方程为

$$A(s)=1+K_g\frac{N(s)}{D(s)}=0$$

即 $$D(s)+K_gN(s)=0\tag{2}$$

设 $$f(s)=D(s)+K_gN(s)=0\tag{3}$$

且 $$f'(s)=D'(s)+K_gN'(s)=0\tag{4}$$

从(3)、(4)式中消去 K_g 得

$$D(s)N'(s)-N(s)D'(s)=0\tag{5}$$

从(5)式中解出的s即为所求的重根点,但这些重根点不一定就是分离点或会合点,这是因为(5)式仅是分离点的必要条件,这就意味着所有分离点均满足式(5),但满足式(5)的解不一定都是分离点,判断哪些解的确是分离点,还必须满足特征方程或用相应的法则来检测.

例1 已知系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K_g}{s(s+1)(s+2)}$$

试求根轨迹在实轴的分离点.

* 收稿日期:2004-09-09

解　$N(s)=1 \qquad D(s)=s(s+1)(s+2)=0$

$N'(s)=0 \qquad D'(s)=3s^2+6s+27=0$

代入(5)式得

$$3s^2+6s+2=0$$

解之得

$$s_1=-0.423 \qquad s_2=-1.577$$

因实轴上[−1,0]和[−∞ ,−2]区段是根轨迹,故 $s_1=-0.423$ 是根轨迹的分离点.

1.2 极值法

分析可知,分离点对应的是最大值(因为再大,轨迹已经离开实轴了).同理,会合点对应的是最小值.因此可用求极值的方法把分离点和会合点求出.

由式(2)可知

$$K_g=-\frac{D(s)}{N(s)}$$

因而

$$\frac{dK_g}{ds}=-\frac{D'(s)N(s)-D(s)N'(s)}{N^2(s)}$$

$$=\frac{D(s)N'(s)-D'(s)N(s)}{N^2(s)} \qquad (6)$$

令 $\frac{dK_g}{ds}=0$ 　可得

$$D(s)N'(s)-D'(s)N(s)=0$$

其结果与重根法的结论相同.

1.3 利用开环零、极的方法

上述两种方法均须对闭环特征方程两端求导数并解联立方程组,如果欲免去求导数的步骤,可采用利用开环零、极的方法.

一般地,如果系统开环传递函数有 m 个零点和 n 个极点,则分离点可由下面方程求得

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{d-z_i}-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{d-p_j}=0 \quad [5] \qquad (7)$$

式中,z_i 为开环零点,p_j 为开环极点.从上式中解出的 d 值即为分离点.

例 2　见例 1.

解　由式(7)可得

$$3d^2+6d+2=0$$

解得 $d_1=-0.423 \qquad d_2=-1.577$

所得结论和用重根法的结论一样.

如果上述三种方法所得出的方程式是二阶方程,求解很容易.然而对于某些较复杂的系统,最终得出的方程式可能是三阶乃至高阶的方程式,求解比较困难.此时,改用牛顿余数定理法或试探法去求解分离点.

1.4 牛顿余数定理法

用牛顿余数定理求解分离点或会合点的具体步骤如下:

(1) 从闭环特征方程中求出 dk_g/ds;

(2) 设 P(s)为 dk_g/ds 的分子多项式;

(3) 分析根轨迹,估计在其分离点(或会合点)可能出现的实轴附近找一个试探点 s_1;

(4) 用 $(s-s_1)$ 去除 p(s)得出商多项式 Q(s)及余数,该余数定义为 R_1;

(5) 再用 $(s-s_1)$ 去除商多项式 Q(s)得第二个余数,定义为 R_2;

(6) 按 $s_2=s_1-R_1/R_2$ 之关系计算出 s_2,s_2 之值明显比原来估计的 s_1 值准确得多地靠近真正的分离点.

一般只作一次试探求出 s_2 就已经充分满足要求.

例 3　用牛顿余数定理求例 1 的分离点.

解　根据式(6)求得

$$\frac{dk_g}{ds}=-3s^2-6s-2$$

取 $P(s)=-3s^2-6s-2$,根据下面除法计算式计算

$$\begin{array}{r|l}
 & -3s-4.5 \Longrightarrow Q(s) \\
\hline
s+0.5 & -3s^2-6s-2 \\
 & -3s^2-1.5s \\
\hline
 & -4.5s-2 \\
 & -4.5s-2.25 \\
\hline
 & 0.25=R_1
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & -3 \\
\hline
s+0.5 & -3s-4.5 \\
 & -3s-1.5 \\
\hline
 & -3=R_2
\end{array}$$

根据绘制根轨迹的基本规则,在区间[−1,0]内必有分离点,设 $s_1=-0.5$,于是 $s-s_1=s+0.5$ 用(s+0.5)去除 P(s),结果得出 $\varphi(s)=-3s-4.5$ 及第一余数 $R_1=0.25$.再以(s+0.5)去除 Q(s),得第二余数 $R_2=-3$.

故有　$s_2=s_1-R_1/R_2=-0.5-0.25/-3=-0.416$

上述结果表明,一次试探的计算结果已经非常接近例 1 的 s_1 值.作为绘制根轨迹,这个精度也足够了.若再选 $s_2=-0.416$ 作为新的试探点,经

1.5 试探法

具体步骤是假定一个 d 值并把它代入(7)式，直到左端计算的数值与零之差小于给定的值为止.[6]

例 4 已知系统的开环传递函数为：

$$G(s)H(s)=\frac{K_g}{s(s+3)(s+1-j)(s+1+j)}$$

试用试探法求其分离点.

解 由求根轨迹的基本规则可知，在实轴上[－3，0]区段有根轨迹，而且必有分离点. $P_1=0, P_2=-3, P_3=-1+j, P_4=-1-j$. 代入式(7)中可得：

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+3}+\frac{2(d+1)}{(d+1)^2+1}=0 \tag{8}$$

假设一个 d 值，直到左端计算的数值与零之差小于给定的值为止.

第一次试探 令 $d=-1.5$，把 d 值代入式(8)得：

$$\frac{1}{-1.5}+\frac{1}{-1.5+3}+\frac{2(-1.5+1)}{(-1.5+1)^2+1}=0.8$$

第二次试探 令 $d=-2.3$，把 d 值代入式(8)得：

$$\frac{1}{-2.3}+\frac{1}{-2.3+3}+\frac{2(-2.3+1)}{(-2.3+1)^2+1}=0.027$$

第一次试探 令 $d=-2.28$，把 d 值代入式(8)得：

$$\frac{1}{-2.28}+\frac{1}{-2.28+3}+\frac{2(-2.28+1)}{(-2.28+1)^2+1}=-0.02$$

由上面计算出等式的符号相异可以判断，d 的准确值在－2.3 与－2.28 之间，最大误差小于 0.02，取 $d=-2.28$ 为分离点. 由于试探法无一定的目的性，带有很大的盲目性，必须经过反复试探，一般很少采用.

2 结束语

一般来讲，较简单的系统常常采用前三种方法来求分离点比较方便；而对于比较复杂的系统采用后两种方法求分离点. 具体用那种方法，视具体情况而定. 有时还可以将这几种方法结合起来求更加方便. 但不管怎样，还必须和有关规则结合起来，才能够又快又准的求出分离点. 有时分离点可能出现复数.

参考文献：

[1]邹伯敏，等. 自动控制理论[M]. 北京：机械工业出版社，2002.

[2]Benjaminc. kuo，等. Automatic control systems[M]. 北京：高等教育出版社，2003.

[3]高国燊，等. 自动控制原理[M]. 广州：华南理工大学出版社，1999.

[4]刘祖润，等. 自动控制原理[M]. 北京：机械工业出版社，1998.

[5]王 敏，等. 自动控制原理试题精选题解[M]. 武汉：华中科技大学出版社，2002.

[6]张 旺，等. 自动控制原理[M]. 北京：北京理工大学出版社，1994.

Several Soving Method of Breakaway Points (or Saddle Points) in Root-locus

WANG Yang

(Department of Physics, Xianning College, Xianning 437005, China)

Abstract: This article introduces several solving method of breakaway points(or saddle points)in root-locus, The common method in simple systems includes method of same root、maxinum(minimal)value and the pols and zeros of the opened-loop control systems, The common method in complicated system includes method of sound out and Newton remaider axioms.

Key words: Root-locus; Breakaway points; Saddle points